Tema 12. Probabilidad

INTRODUCCIÓN

Muchas veces oímos y vemos en las noticias valores numéricos expresados en tanto por ciento, que nos dicen la probabilidad de que suceda algo como, por ejemplo:

Lotería de Navidad: ¿Qué probabilidad hay de que toque el Gordo?

Lotería Navidad | 19/12/2013 - 11:10h | Última actualización: 22/12/2013 - 08:27h

Puestos ambulantes en de la administración Doña Manolita en la Puerta del Sol de Madrid Gtres

MÁS INFORMACIÓN

- Lotería de Navidad: El gasto navideño de los andaluces sube un 2,3%
- Lotería de Navidad: así serán los afortunados millonarios
- Lotería de Navidad: Una vecina de Salou protagoniza el anuncio navideño de La Bruixa d'Or

Madrid.(EFE).- Si tuviéramos todos en mente la probabilidad real de que toque alguno de los premios en la **Lotería de Navidad** nadie jugaría al sorteo porque, en realidad, es "sólo" del 5%. Así que perder en el Sorteo de **Lotería de Navidad** es lo fácil. Hay un 86% de probabilidades de que "no toque nada" contra un 0,00001% de probabilidades de ganar el Gordo, según explica el profesor de matemática aplicada de la Universidad CEU San Pablo, Miguel Córdoba Bueno.

La **probabilidad** es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables.

La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, las ciencias y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad discreta de sucesos potenciales, siendo la rama de las matemáticas que estudia, mide o determina a los experimentos o fenómenos aleatorios.

1. TIPOS DE EXPERIMENTOS

Hay que diferenciar entre dos tipos de experimentos, en función de si conocemos lo que va a suceder o no.

1.1. Experimentos deterministas

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

EJEMPLOS de experimentos deterministas

- Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará.
- Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.

1.2. Experimentos aleatorios

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

EJEMPLOS de experimentos aleatorios

- Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz.
- Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

2. TEORÍA DE PROBABILIDADES

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento **aleatorio**, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro.

2.1. Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (lo representaremos por "E").

EJEMPLOS de espacio muestral

- En el experimento aleatorio "lanzar una moneda", el espacio muestral es E = {C, X}.

- En el experimento aleatorio "lanzar un dado", el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

3. TIPOS DE SUCESOS

Dependiendo de sus características, podemos encontrar distintos tipos de sucesos, que definimos a continuación.

3.1. Suceso elemental

Es cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

EJEMPLOS

En el experimento aleatorio "lanzar una moneda", un suceso elemental es "salir cara": A = {C} y el otro suceso elemental es "salir cruz": B = {X}.

En el experimento aleatorio "lanzar un dado", los sucesos elementales son:

A = {1} B = {2} C = {3} D = {4} F = {5} G = {6}

3.2. Suceso compuesto

Es cualquier subconjunto del espacio muestral formado por más de un elemento.

EJEMPLO: Al tirar un dado un suceso compuesto sería que saliera par: A = {2, 4, 6}, y otro podría ser obtener múltiplo de 3: B = {3, 6}.

3.3. Suceso seguro E

Está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

EJEMPLO: Al tirar un dado obtener una puntuación que sea menor que 7

3.4. Suceso imposible Ø.

Es el que no tiene ningún elemento.

EJEMPLO: Al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7

3.5. Sucesos compatibles

Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

EJEMPLO: Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

A = {2, 4, **6**}   B = {3, **6**}

3.6. Sucesos incompatibles

Dos sucesos, A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.

EJEMPLO: Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

A = {2, 4, 6}   B = {5}

3.7. Sucesos independientes

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

EJEMPLO: Al lanzar dos dados los resultados son independientes.

3.8. Sucesos dependientes

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

EJEMPLO: Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición son sucesos dependientes.

3.9. Suceso contrario

El suceso contrario de A está formado por todos los elementos del espacio muestral que no están en A. Se denota por $\bar{A}$ o A'.

EJEMPLO: Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$ $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

3.10. Ejemplos

En los siguientes ejemplos utilizaremos una baraja española, es decir, una baraja de 40 cartas, para ilustrar los conceptos definidos en los apartados precedentes.

EJEMPLO 1: Sacar una carta de una baraja española

- **Suceso A: "salir el as de oros o la sota de bastos"**
- **Suceso B: "salir un as"**
- **Suceso C: "salir una carta de copas"**

- ✓ Los tres sucesos son compuestos, ya que todos constan de más de un elemento del espacio muestral.
- ✓ Además los sucesos A y B son compatibles, ya que ambos pueden ocurrir a la vez si la carta extraída es el as de oros. También los sucesos B y C son compatibles, ya que ocurrirán los dos si la carta que sale es el as de copas.
- ✓ Sin embargo, los sucesos A y C son incompatibles, ya que no pueden suceder a la vez, sea cual sea la carta que salga.
- ✓ -El suceso contrario al suceso B será: $\overline{B}$ = {no salir un as}. Igualmente podemos decir que el suceso contrario del suceso C es: $\overline{C}$ = {no salir una carta de copas}.
- ✓ Un ejemplo de suceso seguro sería: E = {sacar una carta de oros, copas, espadas o bastos}.
- ✓ Y un ejemplo de suceso imposible sería: Ø = {sacar el dos de picas}, o también Ø = {sacar el tres de corazones}.

EJEMPLO 2: Realizar una extracción de la baraja, anotar el resultado y volver a introducir la carta en la baraja. Realizar una segunda extracción y anotar el resultado.

- **Suceso A: “salir el as de bastos en la primera extracción”**
- **Suceso B: “salir el as de bastos en la segunda extracción”**

- ✓ Los sucesos A y B son independientes, ya que la carta que salga en la segunda extracción no depende del resultado obtenido en la primera, puesto que el resultado únicamente se anota y la carta vuelve a ponerse en el mazo.

EJEMPLO 3: Realizar una extracción de la baraja, y a continuación realizar una segunda extracción y anotar el resultado.

- **Suceso A: “salir el as de bastos en la primera extracción”**
- **Suceso B: “salir el as de bastos en la segunda extracción”**

- ✓ Los sucesos son dependientes, ya que si ocurre A, es decir, sale el as de bastos en la primera extracción, no puede ocurrir el suceso B, porque esa carta no estaría en el mazo, mientras que si el suceso A no ocurre, entonces puede ocurrir B.

4. REGLA DE LAPLACE.

Realizamos un experimento aleatorio en el que hay varios sucesos elementales, todos igualmente probables. Si A es un suceso cualquiera, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$\boxed{P(A) = \frac{número\ \ de\ \ casos\ \ favorables\ \ a\ \ A}{número\ \ de\ \ casos\ \ posibles}}$$

EJEMPLO 1: Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras

Casos posibles = 4, ya que el espacio muestral es: E = {cc, cx, xc, xx}

Casos favorables = 1;

Luego la probabilidad de que salgan dos caras es: P (2 caras) = $\frac{1}{4} = 0{,}25$ Si lo queremos expresar en tanto por cien: 0,25·100 = 25%

EJEMPLO 2: En una baraja de 40 cartas, hallar la probabilidad de sacar un as y la probabilidad de sacar una carta de copas

Casos posibles = 40

Casos favorables de ases = 4; Luego la probabilidad de sacar un as es:

P(as) = $\frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Casos favorables de copas = 10; Luego la probabilidad de sacar copas es:

P(copas)= $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

EJEMPLO 3: Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado al aire salga un número par, un múltiplo de 3 y un número mayor que 4

Casos posibles = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

Un número par.

Casos favorables = {2 ,4 ,6}; → P (par) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}; → P (mul. 3) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33$

Un número mayor que 4. Casos favorables: {5, 6}; → P (>4) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33$

No siempre es posible utilizar la Regla de Laplace tal cuál la hemos visto. Cuando se asignan probabilidades a sucesos de ciertos experimentos aleatorios, hay que tener en cuenta que a veces desconoceremos a priori los resultados que pueden darse. Para solucionar este problema la probabilidad se asigna en función de los resultados obtenidos. A mayor número de repeticiones de ese experimento, contaremos con un mayor número de resultados y podremos calcular la probabilidad de un suceso de forma más aproximada a la posibilidad real, dividiendo el número de veces que ocurre el suceso A entre el número de veces que se realizó el experimento.

$$P\ (A) = \frac{número\ de\ veces\ que\ sucede\ el\ suceso\ A}{número\ de\ repeticiones\ del\ experimento}$$

EJEMPLO: En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 200 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola amarilla en 120 ocasiones, bola roja en 75 ocasiones y bola gris en 5 ocasiones. Al hacer una nueva extracción, ¿qué probabilidad hay que asignar a que se extraiga cada uno de las posibles bolas?

Para solucionar este problema la probabilidad se asigna en función de los resultados obtenidos, es decir, aunque no sepamos cuantas bolas amarillas hay, la probabilidad de que salga bola amarilla en función de los datos obtenidos en las doscientas extracciones es:

$$\text{P(Am)} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5} = 0'6 \cdot 100 = 60\%$$

Y para el resto de colores lo calcularemos de la misma forma:

$$\text{P(Ro)} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8} = 0{,}375 \cdot 100 = 37'5\%$$

$$\text{P(Gr)} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40} = 0'025 \cdot 100 = 2'5\%$$

5. AXIOMAS Y PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Es importante saber que:

- La probabilidad del suceso seguro es 1 (es decir, el 100%):

  P (E) = 1

- La probabilidad del suceso imposible es cero (es decir, el 0%):

  P (Ø) = 0

- De lo anterior se deduce que la probabilidad es positiva y menor o igual que 1

  0 ≤ P (A) ≤ 1

EJEMPLO: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado de seis caras; si A = "sacar un número del uno al seis" y B = "sacar un siete", calcula la probabilidad de ambos sucesos

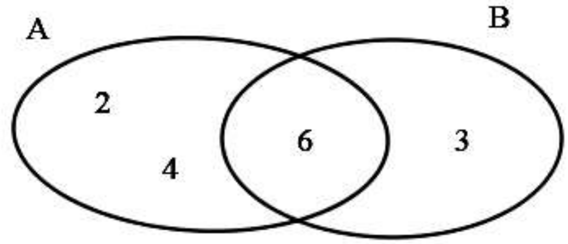
$$P(A) = \frac{6}{6} = 1 \qquad P(B) = \frac{0}{6} = 0$$

6. UNIÓN DE SUCESOS

La **unión de sucesos**, **A U B**, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B. Es decir, el suceso A U B se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos. A U B se lee como "**A o B**".

EJEMPLO. Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A U B.

A = {2, 4, 6};
B = {3, 6}.



A U B = {2, 3, 4, 6}

Es decir, la unión serán todos los elementos de A y todos los elementos de B, sin repeticiones.
Si lo que queremos es hallar la probabilidad de la unión usamos la regla de Laplace:

$$P\ (A\ U\ B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0'67$$

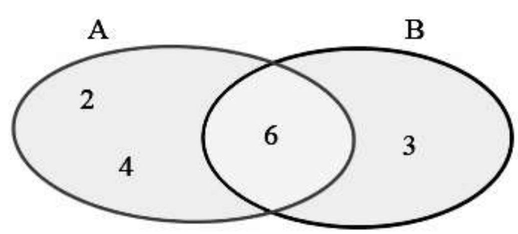
7. INTERSECCIÓN DE SUCESOS

La **intersección de sucesos, A ∩ B**, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B. Es decir, el suceso A ∩ B se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B. A ∩ B se lee como "**A y B**".

EJEMPLO. Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3”, calcular A ∩ B.

A = {2, 4, 6}
B = {3, 6}

A ∩ B = {6}



Es decir, la intersección serán todos los elementos que estén en A y en B.

Y la probabilidad de la intersección será: $P\ (A \cap B) = \frac{1}{6}$

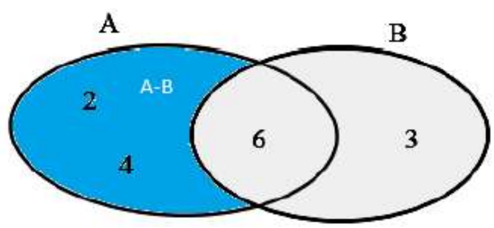
8. DIFERENCIA DE SUCESOS

La diferencia de sucesos, A−B (se lee como "A menos B "), es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

En la práctica, consiste quitarle al primer conjunto, A, aquellos elementos de B que también están en A, no influyendo para nada ni en la operación ni en el resultado, aquellos elementos de B que no están en A. Por ejemplo, si A = {1,2,3} y le quitamos B = {2, 4}, quedará A-B= {1,3}, pues, por así decirlo, como B tiene el 2 y el 4, le puede quitar a A el 2 porque también lo tiene, pero no le puede quitar el 4 porque no lo tenía.

EJEMPLO 1. Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular A – B y B - A

A = {2,4,6} y B = {3,6}. A − B = { 2 ,4}



De forma análoga, B – A = {3}

Y las probabilidades serán:

$$P(A - B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

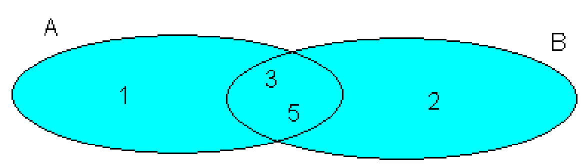
$$P(B - A) = \frac{1}{6}$$

EJEMPLO 2. Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar impar" y B = "sacar números primos", calcular A – B y B - A

A = {1, 3, 5} B = {2, 3, 5}

A − B = {1} B – A = {2}

$P(A - B) = \frac{1}{6}$ $P(B - A) = \frac{1}{6}$



9. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

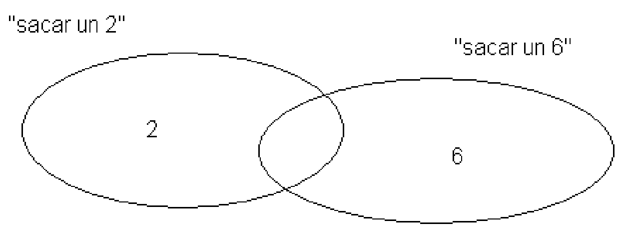
Para calcular la probabilidad de la unión de suceso, hay que aplicar:

P(A U B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)

EJEMPLO. Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 6 al lanzar un dado.

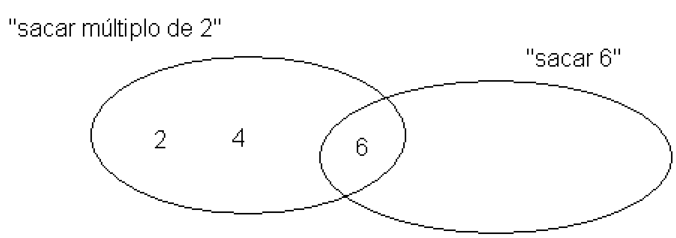
Hay dos maneras de calcularlo:

- Mediante la regla de Laplace: P(2 U 6) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Mediante la fórmula arriba descrita: P(2 U 6) = P(2) + P(6) – P(2 ∩ 6) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



EJEMPLO. Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

- Mediante la regla de Laplace: P(mul.2 U 6) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Usamos la fórmula: P(mul.2 U 6) = P(mul.2) + P(6) - P(mul.2 ∩ 6) = $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



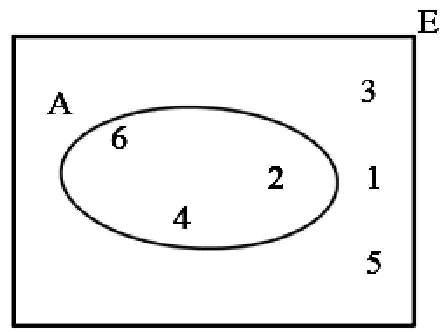
10. PROBABILIDAD DEL SUCESO CONTRARIO

La probabilidad del suceso contrario se puede calcular también de la siguiente forma:

P(Ā) = 1 – P(A)

EJEMPLO. Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par", hallar la probabilidad del suceso contrario:

A = {2, 4, 6} → P(A) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$



Ā = {1, 3, 5} → Mediante la regla de Laplace: P(Ā) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Mediante la fórmula arriba descrita:
P(Ā) = 1 – P(A) = $1 - 0{,}5 = 0{,}5$

11. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Los diagramas de árbol son una herramienta muy útil para determinar de una manera gráfica el espacio muestral de un experimento aleatorio complicado, y así poder calcular probabilidades de una manera más sencilla.

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá de un nudo inicial o raíz, del cual parte una rama por cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad.

En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final u hoja del árbol).

Hay que tener en cuenta que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Para el cálculo de probabilidades a partir de un árbol, hay que tener en cuenta las siguientes premisas:

- *Una vez construido el árbol, tendremos varias hojas, es decir, varios nudos finales.*
- *La probabilidad de un nudo final es el producto de las probabilidades de las ramas que van desde la raíz del árbol hasta ese nudo final*
- *Si para calcular la solución, debemos tener en cuenta varios nudos finales, se calculan las probabilidades de cada uno de ellos según lo indicado en el punto anterior, y se suman todas.*

11.1. Diagramas de árbol para sucesos independientes

Vamos a estudiar un ejemplo de un árbol para el lanzamiento de tres monedas independientes, para calcular las probabilidades de obtener distintos resultados.

EJEMPLO 1. Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan tres caras.

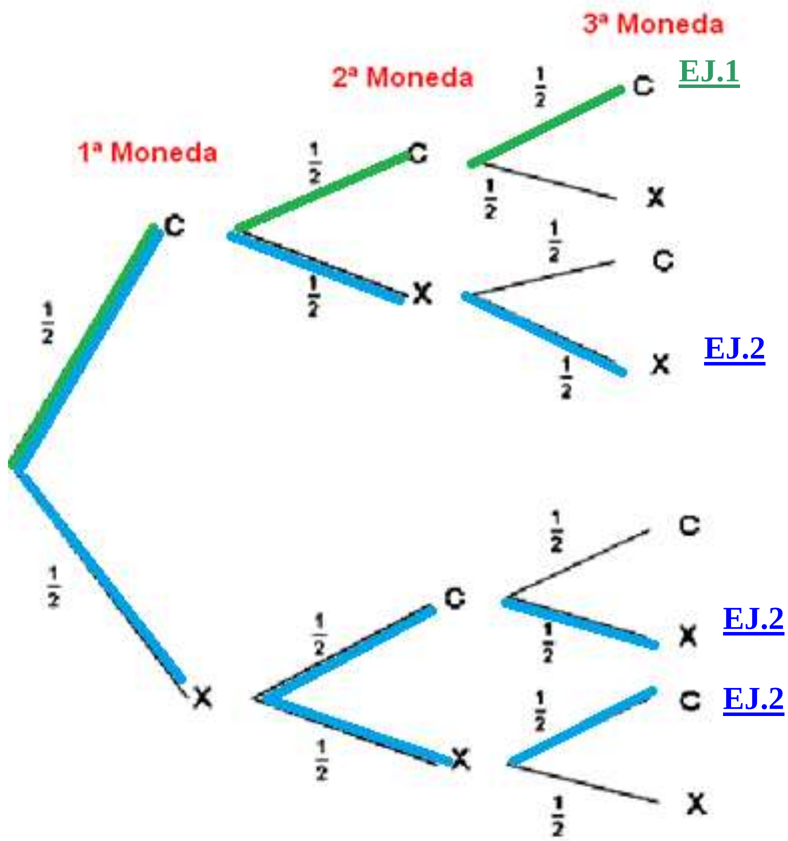
P(3C) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}125\cdot 100=12{,}5\%$

EJEMPLO 2. Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan dos cruces y una cara.

P(2X,1C) =

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{8}=0'375\cdot 100=37{,}5\%$$



Observa que en el ejemplo 1, a partir del árbol, sólo se obtienen 3 caras en el primer caso (C,C,C), por lo que se calcula la probabilidad multiplicando las probabilidades de las tres ramas en verde. Para el ejemplo 2, se calculan las de las tres hojas cuyos caminos desde la raíz están marcados en azul, y se suman, pues son los casos en los que hay dos cruces y una cara (C,X,X), (X,X,C), (X,C,X).

11.2. Diagramas de árbol para sucesos dependientes

Vamos a estudiar un ejemplo de un árbol que representa la elección de varios niños de una clase. En este caso, los sucesos son dependientes, porque si, por ejemplo, al principio sale un niño, en la segunda elección habrá un alumno menos en el total de alumnos de la clase, y habrá un niño menos, permaneciendo invariable antes de esa segunda elección el número de niñas.

EJEMPLO . Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1. Seleccionar tres niños.
2. Seleccionar dos niños y una niña.
3. Seleccionar dos niñas y un niño.
4. Seleccionar tres niñas.

Caso 1. Seleccionar tres niños

P(3 niños) = $\frac{10}{16} \bullet \frac{9}{15} \bullet \frac{8}{14} = 0{,}214$

Caso 2. Seleccionar dos niños y una niña

P(2 niños y una niña) =

$$\frac{10}{16} \bullet \frac{9}{15} \bullet \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \bullet \frac{6}{15} \bullet \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \bullet \frac{10}{15} \bullet \frac{9}{14} = 0{,}482$$

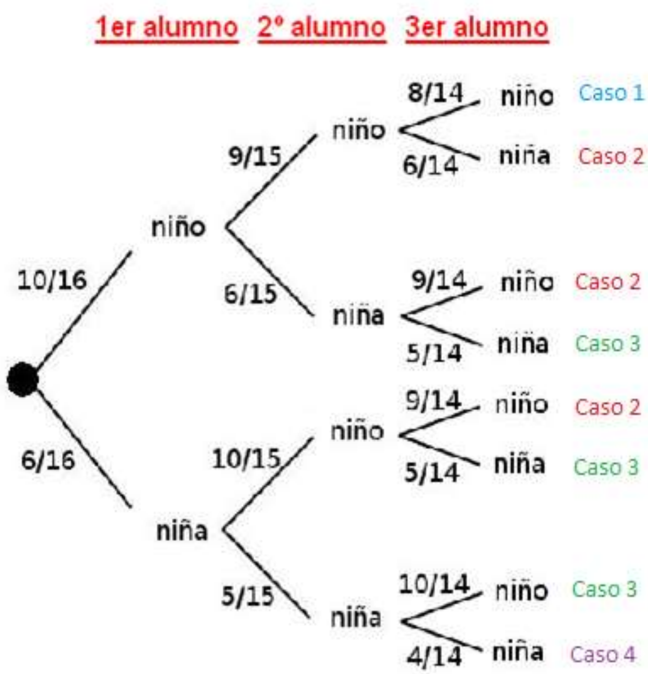
Caso 3. Seleccionar dos niñas y un niño

p(2 niñas y un niño) =

$$\frac{10}{16} \bullet \frac{6}{15} \bullet \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \bullet \frac{10}{15} \bullet \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \bullet \frac{5}{15} \bullet \frac{10}{14} = 0{,}268$$

Caso 4. Seleccionar tres niñas

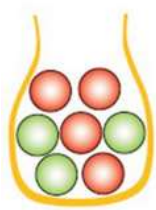
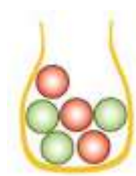
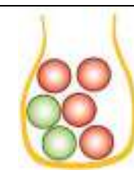
p(3 niñas) = $\frac{6}{16} \bullet \frac{5}{15} \bullet \frac{4}{14} = 0{,}0357$



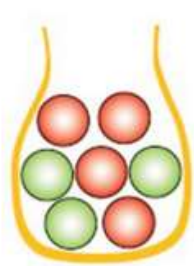
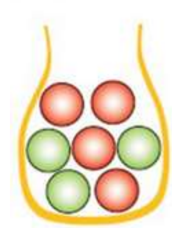
11.3. Reposiciones

En algunos casos, habrá ejercicios en los que se extraigan elementos de un conjunto de forma sucesiva, pudiendo haber reposición o no antes de la segunda y sucesivas extracciones. Esto es lo que se denomina extracción con o sin reposición.

- ***Extracción sin reposición***: afectará a las probabilidades de las sucesivas extracciones, puesto que estamos en un caso de sucesos dependientes. Cuando se hace una extracción, el ítem seleccionado ya no participaría de la siguiente extracción, quedaría fuera de la misma.

Primera extracción	**Segunda extracción**
 P (roja) = 4/7 P (verde) = 3/7	Si la primera bola extraída era roja P (roja) = 3/6 P (verde) = 3/6 
	Si la primera bola extraída era verde P (roja) = 4/6 P (verde) = 2/6 

- ***Extracción con reposición***: no afectará a las probabilidades de las sucesivas extracciones, puesto que estamos en un caso de sucesos independientes. Cuando se hace una extracción, el ítem seleccionado se vuelve a introducir antes de la siguiente extracción, por lo que las probabilidades en la siguiente extracción serían similares a las iniciales.

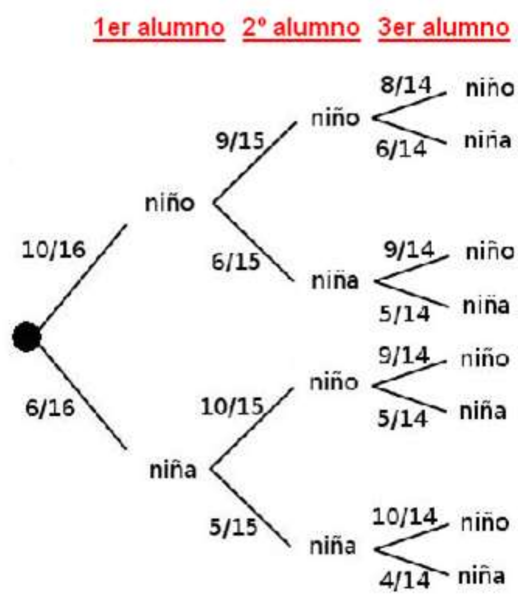
Primera extracción	**Segunda extracción**
 P (roja) = 4/7 P (verde) = 3/7	 P (roja) = 4/7 P (verde) = 3/7 Da igual si la primera bola extraida era roja o verde, pues vuelve a meterse en la bola antes de la segunda extracción

11.4. Poda de árboles

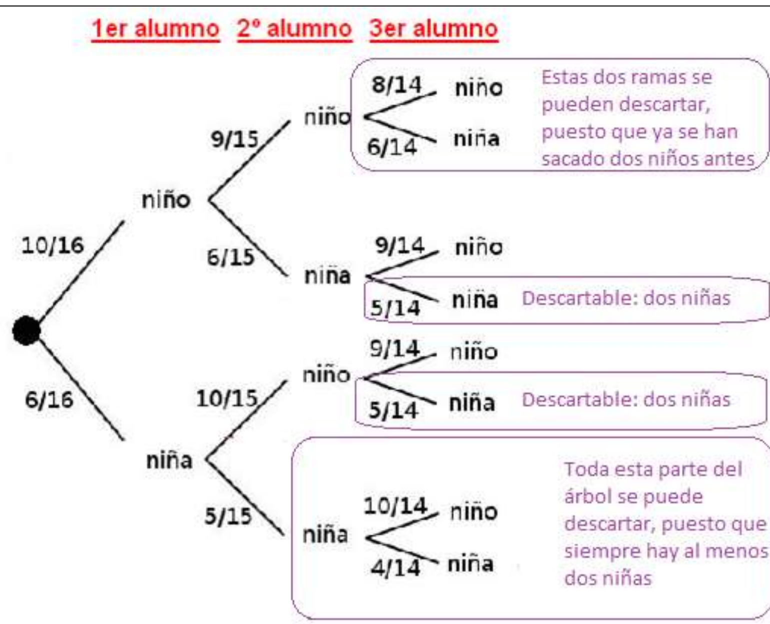
En algunos casos, es posible trabajar con un árbol podado, es decir, no hace falta expandir todo el árbol si vemos que no va a hacer falta, en función del problema planteado. Vamos a verlo con un ejemplo:

EJEMPLO . Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de obtener al menos dos niños.

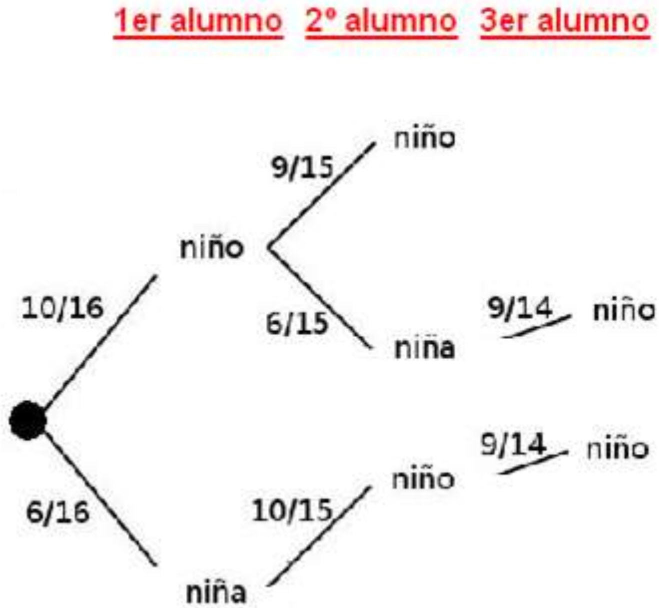
El supuesto planteado se cumplirá cuando tengamos dos o tres niños, puesto que se eligen tres y nos pide que al menos haya dos. Por tanto, el árbol completo sería el siguiente.



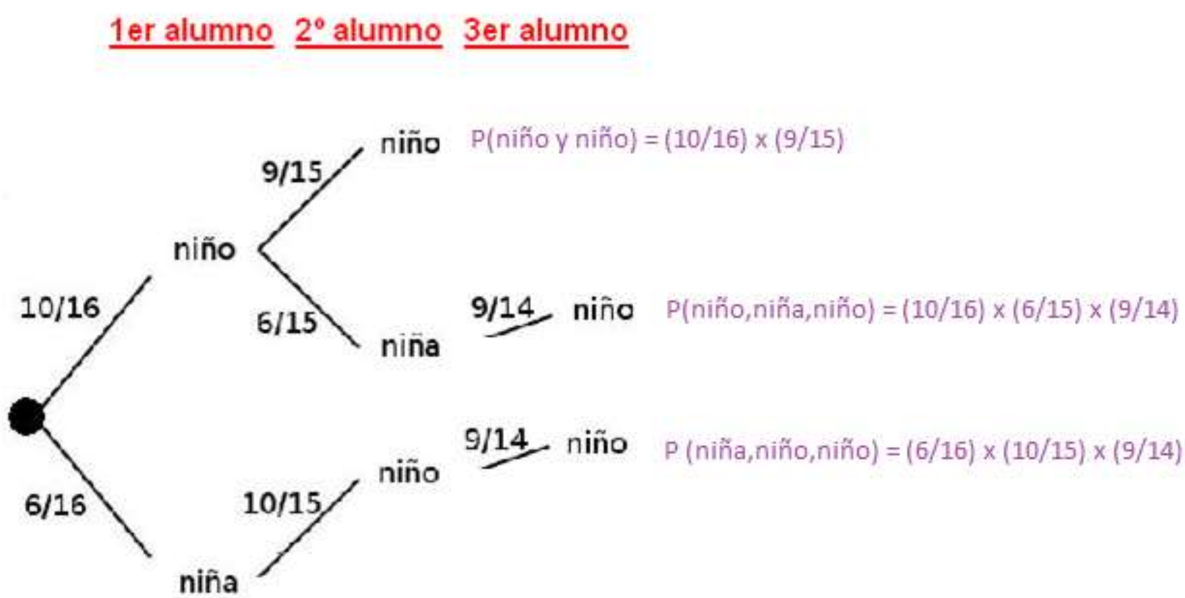
No obstante, podemos realizar las siguientes podas:



De esta forma, obtendríamos un árbol más reducido a partir del cual obtendríamos también la solución:



En este caso, habría que sumar las probabilidades de las hojas del árbol. Observa que la primera está en un segundo nivel (por lo que sólo hay que multiplicar las probabilidades de dos ramas), y las demás en un tercer nivel (por lo que habrá que multiplicar las probabilidades de las tres ramas en cada caso).



$$P(al\ menos\ 2\ niños) = \frac{10}{16} \bullet \frac{9}{15} + \frac{10}{16} \bullet \frac{6}{15} \bullet \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \bullet \frac{10}{15} \bullet \frac{9}{14} = \quad 0{,}696\ (69{,}6\%)$$

EJERCICIOS

1.- Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.

a) Extraer una carta de una baraja española.

b) Restar dos números fijos.

c) Preguntar a tus compañeros un número del 1 al 25.

d) Medir la altura de un compañero.

e) Pulsar un interruptor que enciende una bombilla en un circuito eléctrico correcto.

2.- Determina los espacios muestrales de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Una urna contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras; extraemos una bola y anotamos su color.

b) El sexo de un futuro bebé.

c) Decir el número de viajeros que pueden ocupar un taxi de 4 plazas sin incluir al conductor.

d) Lanzamos dos dados y anotamos la suma de los resultados obtenidos.

3.- Describe los siguientes sucesos, indicando si son elementales o compuestos:

a) “Obtener una bola de color claro” en una urna que contiene bolas blancas, amarillas y negras.

b) “Conseguir el rey de espadas” al extraer una carta de baraja española.

c) “Conseguir un rey” al extraer una carta de baraja española.

d) Que salga un número primo al tirar un dado.

e) Que salga cruz al lanzar una moneda.

4.- En una urna tenemos 5 bolas blancas y 4 bolas rojas. Escribe un suceso seguro y otro imposible.

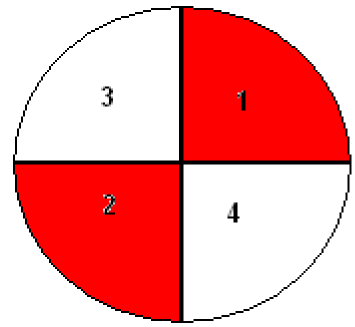
5.- En las siguientes experiencias aleatorias determina primero el espacio muestral, determina después los sucesos descritos, y por último determina sus contrarios.

a) Obtener un número primo al lanzar un dado.

b) Que al tirar dos monedas salgan dos caras.

c) Al lanzar dos dados y sumar los resultados obtenidos, obtener una suma inferior a 6.

6.- Consideremos la diana de la figura y el experimento lanzar un dardo. Forma todas las parejas posibles con los siguientes sucesos, indicando si son compatibles o incompatibles:



a) Acertar en zona sombreada.

b) Acertar en un número par.

c) Acertar en la mitad superior.

7.- Aplicando la Ley de Laplace, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Obtener cara al lanzar una moneda.

b) Sacar bola roja de una urna que contiene 5 bolas rojas, 2 negras y 3 blancas.

c) Sacar bola negra de la urna del apartado anterior.

d) Sacar bola blanca de la urna del apartado b).

e) Ganar el premio de un sorteo cuyas papeletas van numeradas del 0 al 999.

f) Ganar el premio del sorteo del apartado anterior, si llevamos 4 papeletas cuyos números son: 121, 333, 000, 342.

8.- En una bolsa de deporte hay muchos billetes, pero no se sabe cuántos hay. Sacamos 55 billetes (volviéndolo a meter tras cada extracción) y aparecen 23 de 500€, 18 de 200€ y 14 de 100€. ¿Qué probabilidad dirías que hay de sacar cada uno de ellos?

9.- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola negra de una urna que sólo contienen bolas blancas y negras, sabiendo que la probabilidad de extraer bola blanca es 0,4?

10. Se extrae una carta al azar de un mazo inglés normal (cuatro palos) de 52 cartas. Calcula la probabilidad de que no salga un rey.

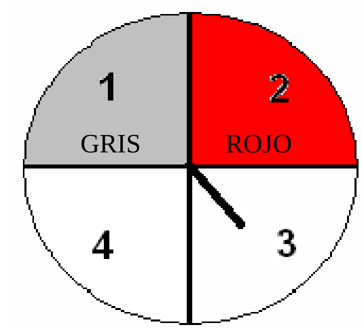
11.- Se consideran los siguientes sucesos del experimento aleatorio "tirar un dado de seis caras": A="sacar par"; B="sacar impar"; C="sacar número primo"; D="sacar múltiplo de 3". Describe los siguientes sucesos y calcula sus respectivas probabilidades:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup D$, $B \cap D$, $C \cup D$, $C \cap D$.

12.- Se consideran los siguientes sucesos del experimento aleatorio “tirar un dado de seis caras”: A=”sacar par”; B=”sacar impar”; C=”sacar número primo”; D=”sacar múltiplo de 3”. Describe los siguientes sucesos y calcula sus respectivas probabilidades:

A – B, B – A, A – C, C – A, B – D, D – B, C – D, D – C

13.- Considerando la ruleta de la figura, calcula las siguientes probabilidades:



a) Que salga rojo: P(R)
b) Que salga par: P(par)
c) Obtener rojo o blanco: P(R U B)
d) Obtener impar y gris: P(impar ∩ G)
e) Obtener impar menos gris: P(impar – G)
f) $P(\overline{R})$, $P(\overline{par})$.
g) Que salga gris.
h) Que salga blanco.
i) Obtener rojo o par.
j) Obtener par y gris.
k) Obtener blanco menos rojo.
l) Que no salga gris.
m) Obtener algún número menor que 3.

14. En el lanzamiento de un dado de diez caras, describe los siguientes sucesos y calcula la probabilidad de que salga: (NOTA: los primeros números primos son el 2, 3, 5, 7, 11…)

a) Número par o primo.
b) Número impar o primo.
c) Número par o impar.
d) Número par y primo.
e) Número impar y primo.
f) Número impar y par.
g) Número par menos primo.
h) Número primo menos impar.
i) Número impar menos par.

15. Se hace girar la flecha y se observa sobre qué número se detiene. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: (NOTA: los primeros números compuestos son = 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14…)

a) "Obtener 4 o más" b) "Obtener un número primo"

c) "Que salga el 7" d) "Que no salga el 7"

e) "Que salga un número compuesto ó múltiplo de tres".

f) "Que salga un número compuesto y múltiplo de tres".

g) "Que salga un número compuesto menos múltiplo de tres".

h) "Que salga un número compuesto ó par".

i) "Que salga un número compuesto y par".

j) "Que salga un número compuesto menos par"

16. Lanzamos un dado dodecaédrico (de 12 caras), y se definen los siguientes sucesos:

A = "Sacar múltiplo de 2" *B* = "Sacar múltiplo de 4" *C* = "Sacar múltiplo de 5"

Describir los siguientes sucesos y hallar sus respectivas probabilidades:

AUB, AUC, BUC; A∩B, A∩C, B∩C; A–B, B–A, A–C, C–A, B–C, C–B.

17. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

18. Según el espacio muestral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} se obtienen los siguientes conjuntos de valores:

A = {1, 2, 3} B = {3, 4, 6} C = {1, 5} D = {2, 5, 6}

Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades:

$A \cup \overline{C}=$ $D - A=$ $B \cap C=$ $\overline{B} - \overline{A}=$

19. En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 100 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 41 ocasiones, bola negra en 19, bola verde en 18 y bola azul en 22. Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.

b) No sacar bola blanca.

c) Sacar bola verde o azul.

d) No sacar ni bola negra ni azul.

e) Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

20.- En una ciudad se publican dos periódicos: LAS NOTICIAS y EL DIARIO. Se sabe que la probabilidad de que una persona, elegida al azar, lea LAS NOTICIAS es del 30% y la de que lea EL DIARIO es del 25%. Además hay personas que leen los dos periódicos y la probabilidad de que esto ocurra es del 5%. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar lea alguno de los dos periódicos.

21.- Según las ventas obtenidas, la probabilidad de que una persona compre cereales de desayuno CRUSTY es del 40%, mientras que la probabilidad de que una persona compre cereales de la competencia TASTY es de un 55%. Si además se sabe que la probabilidad de que una persona compre alguna de las dos marcas es del 75%, ¿cuál es la probabilidad de que haya gente que compre las dos marcas de cereales?

22.- Considerando el lanzamiento primero de una moneda y después de un dado:

a) Construye el diagrama de árbol asociado a este experimento aleatorio.

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los posibles resultados?

c) Calcula la probabilidad de obtener cara y un múltiplo de 3.

d) Calcula la probabilidad de obtener cruz y un número primo.

23.- Se realiza el experimento aleatorio “lanzar dos dados”:

a) Construye el diagrama de árbol asociado a este experimento aleatorio.

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos veces el seis?

c) Calcula la probabilidad de obtener dos números pares.

d) Calcula la probabilidad de que con las dos caras que salgan se pueda formar el número 25.

24. Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que salga 6 en todos.

25.- Sabemos que una baraja española de 40 cartas se divide en cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. Si realizamos el experimento consistente en extraer sucesivamente dos cartas sin reponerlas en la baraja, y anotar de qué palo son:

a) Construye el diagrama de árbol asociado a este experimento aleatorio.

b) Calcula la probabilidad de obtener dos oros.

c) Calcula la probabilidad de obtener dos cartas del mismo palo.

d) Calcula la probabilidad de obtener espadas y bastos.

e) Calcula la probabilidad de obtener dos cartas de distinto palo.

26. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral mediante el diagrama de árbol cuando:

a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

b) La primera bola no se devuelve.

27. Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Realizar el diagrama de árbol y hallar la probabilidad de los siguientes supuestos, primero con reposición y después sin reposición:

a) Que salgan dos bolas rojas.

b) Que salgan dos bolas blancas.

c) Que salga una bola roja y otra blanca.

28. En una caja de juguetes hay 10 pelotas rojas, 8 blancas, 6 verdes y 4 azules. Hallar la probabilidad de que se extraigan dos del mismo color en los siguientes supuestos:

a) Con reposición

b) Sin reposición

29. Tenemos un aula que contiene 10 españoles, 7 franceses y 3 ingleses. Si sacamos 2 personas sin reposición. Calcula la probabilidad:

a) De que los 2 sean ingleses.

b) De que los 2 sean franceses.

c) De que los 2 sean españoles.

d) De que los 2 sean de la misma nacionalidad.

30. Se sabe que en una caja de 30 galletas hay 15 de chocolate, 10 de vainilla y 5 de nata. Si cogemos dos galletas sin mirar para comérnoslas:

a) Construye el diagrama de árbol asociado a este experimento aleatorio.

b) Calcula la probabilidad de que las dos galletas nos salgan de distinto sabor.

31. El monedero de Luis contiene 2 monedas de plata y 3 de cobre, y el de Ana contiene 4 de plata y 3 de cobre. Si se elige un monedero al azar y luego se extrae una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea de plata? Construye el diagrama de árbol para ayudarte.

32. Tenemos un taller que contiene 3 camiones, 12 coches y 20 motos. Si sacamos 2 vehículos sin que entre ninguno mientras, calcula la probabilidad de que los dos sean de la misma clase. Dibuja para ello el diagrama de árbol asociado a este experimento aleatorio.

33. Sara tiene en su cartera dos monedas de 10 céntimos, cuatro de 50 céntimos y tres de 1€. Saca dos monedas al azar sin volverlas a meter. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Que saque 1,50€. b) Que ninguna sea de 10 céntimos.

34. En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer <u>al menos</u> una papeleta con el dibujo de un coche:

a) Si se saca una papeleta. b) Si se extraen dos papeletas. c) Si se extraen tres papeletas.

35. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

a) La probabilidad de que salga el 7, y la probabilidad de su contrario.

b) La probabilidad de que el número obtenido sea par, y la probabilidad de su contrario.

c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres, y la probabilidad de su contrario.

d) La probabilidad de que el número obtenido sea par o múltiplo de tres.

e) La probabilidad de que el número obtenido sea par y múltiplo de tres.

f) La probabilidad de que el número obtenido sea par menos múltiplo de tres.

36. Lanzamos dos dados y anotamos la diferencia (el resultado de la resta) entre la mayor y la menor puntuación. Completa la tabla y calcula la probabilidad de que dicha diferencia sea:

a) 0 b) 5 c) 2 como máximo.

37. Lanzamos dos dados. Llamamos A, B y C a los siguientes sucesos:

A: La suma de puntos es 5.

B: En uno de los dados ha salido el 4.

C: En los dos dados salió el mismo resultado.

Calcula: P(A), P(B), P(C), P(A∪B), P(A∩B), P(A∩C).

38. Javier tiene en su monedero 4 monedas de 5 céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al zar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Que las dos sean de 5 céntimos

b) Que ninguna sea de un euro

c) Que saque 1,20 €

39.- En una bosa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcula la probabilidad de que el número formado por las tres bolas sea el 121, suponiendo que:

a) La bola se reintegra a la bolsa

b) La bola no se devuelve a la bolsa

40.- Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo. Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos

b) Haga un punto

c) No haba ningún punto

41. En una bolsa tenemos las letras S, S, S, N, N, I, I, I, I O,O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI (no importa el orden)?

42. Realizamos el siguiente experimento: lanzamos un dado si se obtiene primo escogemos una urna en la que hay 4 bolas negras y 5 rojas y sacamos una bola, si no sale primo escogemos otra urna en la que hay 5 bolas negras y 6 rojas y sacamos una bola. Calcula la probabilidad de que la bola sea roja.

43. Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis se consideran los siguientes sucesos: A = {mete sólo uno de ellos}, B = {mete dos de los tres} y C = {mete el primero}. Halla la probabilidad de los sucesos A, B Y C.

44. En una casa hay tres llaveros A, B y C; el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

45. Un dado está trucado. Lo lanzamos 100 veces y obtenemos en 34 de esos lanzamientos un 6. Lo lanzamos otras 100 veces y obtenemos en 33 de esos lanzamientos un 6. Repetimos el experimento una tercera vez, obteniendo en 35 ocasiones un 6. ¿Cuál dirías que es la probabilidad de obtener el número 6 al lanzar ese dado?

46. Define los siguientes sucesos:

A= {obtener copas o bastos menor que 5 de una baraja de cartas}

B= {obtener copas en una baraja}

Calcula la unión e intersección de A y B, así como B-A

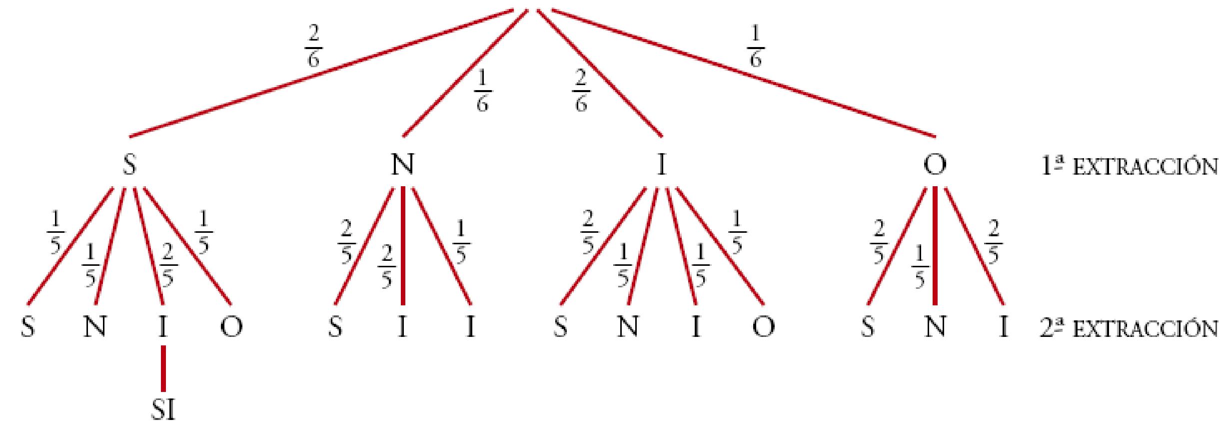
47. Tenemos dos billetes de 5€, tres billetes de 100€, un billete de 200€ y cinco billetes de 20€. Calcula la probabilidad de:

A) Sacar un billete de 20 €

B) Al sacar dos billetes, la suma de ambos sea más de 100 euros.

EJERCICIOS RESUELTOS.

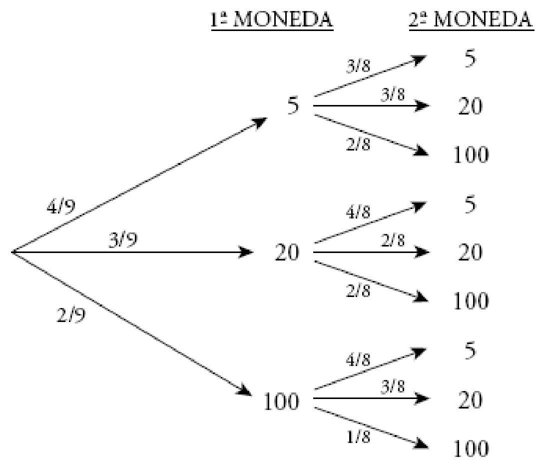
25 **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**



$$P[\text{“SI”}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

26 **Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar.**
¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?
a) Que las dos sean de cinco céntimos.
b) Que ninguna sea de un euro.
c) Que saque 1,20 €.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cent.



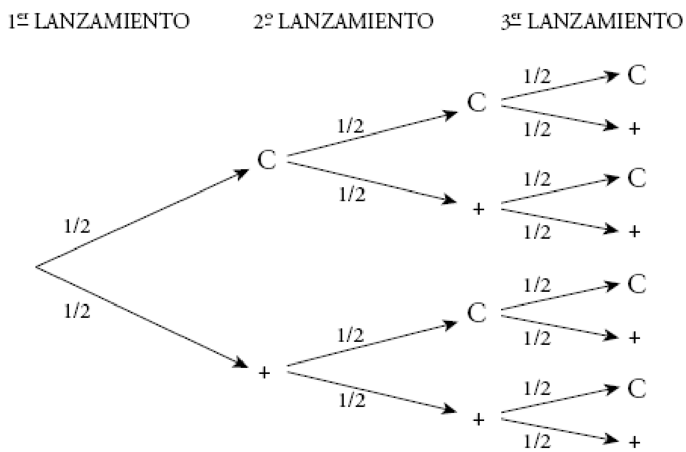
a) $P[\text{DOS DE 5 CENT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = P[100,\ 20] = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{6}$

29 **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



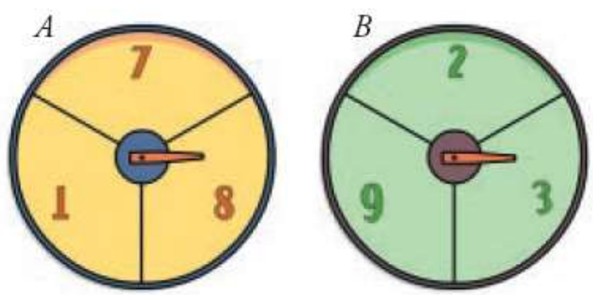
P[GANE MATÍAS] = P[C, C, +] + P[C, +, C] + P[+, C, C] + P[+, +, C] +

$$+ P[+, C, +] + P[C, +, +] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P[\text{GANE ELENA}] = P[C, C, C] + P[+, +, +] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

30 Se hace girar la flecha en cada una de estas ruletas, y gana la que consiga la puntuación más alta.

Calcula la probabilidad de que gane A y la de que gane B.

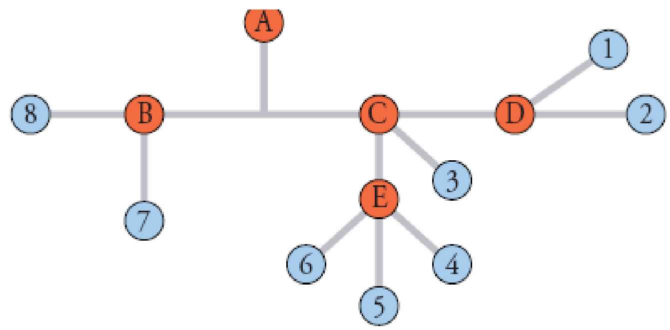


			A	
		1	7	8
	2	1-2	7-2	8-2
B	3	1-3	7-3	8-3
	9	1-9	7-9	8-9

$$P[\text{GANE A}] = \frac{4}{9}$$

$$P[\text{GANE B}] = \frac{5}{9}$$

32 Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada nudo es igual de probable que el tren continúe por cualquiera de los caminos que salen de él.



Un viajero sube a un tren en A sin saber a dónde se dirige.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

b) Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las estaciones.

a) $P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

b) $P[1] = P[2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{1}{18}$

$P[7] = P[8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$